Hochschule Karlsruhe - Technik und Wirtschaft
Fakultät für Informatik und Wirtschaftsinformatik
Prof. Dr.-Ing. Astrid Laubenheimer

WS 19/20
29.02.2020
14:00 Uhr

Probe-Klausuraufgaben zur Prüfung
Optimierung

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Erlaubte Hilfsmittel: Handbeschriebenes, einseitig beschriebenes A4-Blatt.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte	8	8	8	6	6	36
erreichte Punkte						

Viel Erfolg!

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________________

Aufgabe 1 (2+2+2+2=8 Punkte) Analysis. Gegeben sei die quadratische Funktion

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 4$$

a) Wie lautet der Gradient der Funktion f?

b) Berechnen Sie alle Nullstellen des Gradienten (=kritischen Punkte).

c) Wie lautet die Hesse-Matrix der Funktion f?

d) Besitzt die Funktion ein Minimum oder Maximum? Begründung.

Weitere Themen, die im Kapitel Analysis definitiv relevant sind: lineare Funktionen, konvexe Funktionen, Richtungsableitung und Jakobi-Matrix.

Aufgabe 2 (2+2+2+2=8 Punkte) Numerik

a) Gegeben seien zwei reguläre, symmetrische Matrizen, eine Matrix A mit den Eigenwerten $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0.5, \lambda_3 = 0.1$ und eine Matrix B mit den Eigenwerten $\mu_1 = 10, \mu_2 = 0.5, \mu_3 = -0.1$. Welche der Matrizen ist schlechter konditioniert? Begründung.

b) Erläutern Sie, was man im Zusammenhang mit der Lösung von linearen Gleichungssystemen unter dem Begriff „Pivotisierung" versteht und warum man sie anwendet.

c) Nennen Sie einen Algorithmus, der nur mit Pivotisierung verwendet werden sollte und einen bei dem auf Pivotisierung verzichtet werden kann.

d) Gegeben sei eine LU-Zerlegung einer Matrix A. Wie wird die Zerlegung genutzt, um das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ zu lösen?

Aufgabe 3 (4+4=8 Punkte) Least Squares.

a) Gegeben sei das lineare kleinste Quadrate Problem

$$\text{argmin}_{x,y\in\mathbb{R}} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(r_i(x,y))^2$$

mit den Residuen

$$\begin{aligned} r_1(x,y) &= 1x+2y-3 \\ r_2(x,y) &= 4x+2y-5 \\ r_3(x,y) &= 2x+1y-4 \end{aligned}$$

Ferner sei $\theta = (x,y)$. Stellen Sie für das Problem die Normalgleichung $A^TA\theta = A\vec{b}$ auf.

b) Für kleinste Quadrate Probleme lautet die Hesse-Matrix

$$H(\theta) = J^T(\theta)J(\theta) + \sum_{i=1}^{M} r_i(\theta)\nabla^2 r_i(\theta)^T$$

Sehr häufig wird jedoch die Approximation der Hesse-Matrix

$$H(\theta) \approx J^T(\theta)J(\theta)$$

verwendet. Erläutern Sie, warum das plausibel ist und erläutern Sie, warum (und in welchem Fall) das von Vorteil ist.

Weitere wichtige Themen aus dem Kapitel: Gauß-Newton für nichtlineare kleinste Quadrate, Levenberg-Marquardt, Alternating Least Squares und vektorielle Residuen.

Aufgabe 4 (2+4=6 Punkte) Automatisches Differenzieren.

a) Gegeben sei die Funktion $E(x, y) = x^2 + y^2$. Stellen Sie einen gerichteten Rechengraphen (Knoten und Kanten) für die Funktion E auf.

b) Berechnen Sie $E(1, 2)$ und den Gradienten $\frac{\partial E}{\partial x}$ an der Stelle $(1, 2)$ mit Hilfe des automatischen Differenzierens (Forward-Mode). Nutzes Sie dafür den Rechengraphen und notieren Sie die Zwischenergebnisse z.B. mit Hilfe folgender Tabelle.

Variable	Definition	$E(1,2)$	$\partial_{\vec{p}}(x_1, x_2)$ Forward	$\partial_{\vec{e}_1}(1,2)$

Aufgabe 5 (2+2+2=6 Punkte) Restringierte Optimierung.

a) Gegeben sei nun das restringierte Optimierungsproblem

$$\text{argmin}_{x,y\in\mathbb{R}} x^2 + y^2 \qquad \text{s.t.} \qquad x + y = 2$$

Wie lautet die zugehörige Lagrange-Funktion?

b) Geben Sie die partiellen Ableitungen an, die für die Lösung erforderlich sind.

c) Für den C-Means kann die Aktualisierung der Zugehörigkeitsgrade $w_{k,\vec{x}}$ optimal bestimmt werden, wenn als Zielfunktion der

$$WSSE = \sum_{k=1}^{K} \sum_{\vec{x}\in D} w_{k,\vec{x}}^p d^2(\vec{x}, \vec{z}_k)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{k=1}^{K} w_{k,\vec{x}}^p = 1 \; \forall \; \vec{x} \in D$$

minimiert wird. Wie lautet die zugehörige Lagrange-Funktion?